

- FINCH, G. I. & WILMAN, H. (1937). *Ergebn. exakt. Naturw.* **16**, 353.  
 HILLIER, J. & DAVIDSON, N. (1947). *J. Appl. Phys.* **18**, 499.  
 ITO, T. (1950). *Nature, Lond.* **164**, 755.  
 MAHLA, E. M. & NIELSEN, N. A. (1951). *Trans. Amer. Soc. Met.* **43**, 290.  
 PIETROKOWSKY, P. & DUWEZ, P. (1950). *Trans. Amer. Inst. Min. (Metall.) Engrs.* **188**, 1283.  
 SHOEMAKER, D. P. & BERGMAN, B. (1950). *J. Amer. Chem. Soc.* **72**, 5793.  
 WILMAN, H. (1948). *Proc. Phys. Soc.* **60**, 341.

*Acta Cryst.* (1952). **5**, 619

## Die Energieströmung bei Röntgenstrahl-Interferenzen in Kristallen

VON M. v. LAUE

*Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Faradayweg 4-6, Berlin-Dahlem, Deutschland*

*Eingegangen am 31. Januar 1952)*

It is shown how the dynamical theory of X-ray diffraction accounts for the experimentally observed path of the X-ray energy through thick crystals set at reflecting positions. This path is determined only by the nature of the crystal and the wavelength of the X-rays, and is due to the anomalous absorption of the X-rays incident at the Bragg angle.

### 1. Einleitung

In Übereinstimmung mit den meisten Versuchsanordnungen betrachtet die Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen die Breite einer auf den Kristall treffenden Welle im allgemeinen als gross gegen dessen Dicke und fragt nicht nach der seitlichen Begrenzung, also auch nicht nach der Lage der Austrittsstelle zur Eintrittsstelle. Klare Beobachtungen darüber finden sich zuerst wohl bei Cork (1932) und bei Murdock (1934), welche aus einer Dreiteilung von Interferenzpunkten auf eine Dreiteilung der Austrittsstelle schlossen. Später veröffentlichten Du Mond & Bollmann (1936*a, b*; 1938), sowie Hirsch (1938), Ähnliches; neuerdings ist Barraud (1951) auf diese Erscheinung zurückgekommen. § 6 wird in Übereinstimmung mit diesen Autoren zeigen, dass es sich dabei zum Teil um Oberflächenerscheinungen handelt. In voller Reinheit hat den Energiestrom durch das Innere erst Borrmann (1950, 1951) gesehen; er liegt, wie auch schon die ältere Literatur angibt, jedenfalls sehr nahe der bei der Interferenz 'spiegelnden' Netzebene. Für nichtabsorbierende Kristalle lässt sich nach §§ 2 und 3 nicht verstehen, dass ein eindeutig angebar, von den besonderen Versuchsbedingungen unabhängiger Energieweg zur Beobachtung kommt. Nach § 4 hingegen ist dies die notwendige Folge der Absorption, und zwar jener anomalen Absorption, welche Borrmann (1941, 1950) für den Interferenzfall experimentell entdeckt und der Verfasser in einer früheren Arbeit, welche wir hier als 'I' zitieren (Laue, 1949), dynamisch erklärt hat.

Wie in I setzen wir im Folgenden voraus, dass der abgebeugte Strahl auf der Rückseite der Kristallplatte austritt. Wir übernehmen alle Gleichungen und Bezeichnungen der Veröffentlichung I, benutzen ausser-

dem Gleichungen aus der 2.-ten Auflage meines Buchs über *Röntgenstrahl-Interferenzen* (Laue, 1948), welche wir als 'II' zitieren; dies benutzt dieselben Bezeichnungen mit der einzigen Ausnahme, dass der Abbeugungswinkel in I und hier  $2\theta$ , in II  $\theta$  genannt ist.

Jede Theorie der Energieströmung in einem elektromagnetischen Felde muss vom Poyntingschen Vektor ausgehen; bei periodischen Schwingungsvorgängen bestimmt dessen Zeit-Mittel über eine Periode den Strahl. Bei Schwingungen im Raumgitter variiert dieses aber noch innerhalb jeder Zelle periodisch nach Grösse und Richtung; daher muss man, um die Strahl-Richtung zu finden, noch eine räumliche Mittelung über die Zelle vornehmen. Das ist der einzige Unterschied gegenüber den sonstigen optischen Problemen.

### 2. Das einzelne Wellenfeld im nichtabsorbierenden Kristall

Das einfachste elektromagnetische Feld im Raumgitter ist ein aus unendlich vielen ebenen Wellen zusammengesetztes Wellenfeld. Man beschreibt es unter Zugrundelegung der elektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$  durch die Formel\*:

$$\mathfrak{D} = \exp [2\pi i \nu t] \mathbf{S}_m \mathfrak{D}_m \exp [-2\pi i (\mathfrak{R}_m r)] \quad (1)$$

oder, bei Bevorzugung der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , durch die gleichwertige Formel:

$$\mathfrak{H} = \exp [2\pi i \nu t] \mathbf{S}_m \mathfrak{H}_m \exp [-2\pi i (\mathfrak{R}_m r)] . \quad (2)$$

Die Summation nach  $m$  bedeutet dreifache Summation

\* Die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) stehen in II unter den Nummern (26.25), (26.34), (26.24), und (26.35).

nach den Indices  $m_1, m_2, m_3$  der Interferenz, welcher der Wellenvektor  $\mathfrak{R}_m$  zugeordnet ist. Diese Vektoren sind unter einander und mit den Grundvektoren  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$  des reziproken Gitters verbunden durch die schon in der geometrischen Theorie bekannten Interferenzbedingungen:

$$\mathfrak{R}_m = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{b}_m, \quad \mathfrak{b}_m = \sum_1^3 m_e \mathfrak{b}_e; \quad (3)$$

nur dass im Gegensatz zu dieser die  $\mathfrak{R}_m$  nicht die gemeinsame Länge  $\lambda^{-1}$  ( $\lambda$  = Wellenlänge) haben, vielmehr davon um kleine, zunächst unbekannte Beträge abweichen.

Der Poyntingsche Vektor der Energieströmung ist in Strenge aus der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  nach der Gleichung  $\mathfrak{S} = c/4\pi[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$  zu berechnen. Da sich aber in der zu (1) oder (2) gleichwertigen Felddarstellung

$$\mathfrak{E} = \exp[2\pi i \nu t] \mathbf{S}_m \mathfrak{E}_m \exp[-2\pi i(\mathfrak{R}_m \mathbf{r})] \quad (4)$$

die Fourierkoeffizienten  $\mathfrak{E}_m$  von den gleichnamigen  $\mathfrak{D}_m$  nur um kleine Beträge unterscheiden,† setzen wir hier das Produkt  $[\mathfrak{D}\mathfrak{H}]$  an die Stelle von  $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ . Wir ziehen die Felddarstellung durch  $\mathfrak{D}$  deswegen einer durch  $\mathfrak{E}$  vor, weil die  $\mathfrak{D}_m$ , nicht aber die  $\mathfrak{E}_m$  senkrecht zu  $\mathfrak{R}_m$  sind (siehe I, (26·36)).

In den Problemen der Optik hat man nicht mit den Momentanwerten  $\mathfrak{S}$ , sondern mit dem Zeitmittel  $\bar{\mathfrak{S}}$  zu tun. Verstehen wir unter  $\mathbf{R}(u)$  den reellen Anteil der komplexen Grösse  $u$ , unter  $\mathfrak{H}^*$  den zu  $\mathfrak{H}$  konjugiert komplexen Vektor, so wird bekanntlich

$$\bar{\mathfrak{S}} = c/8\pi \mathbf{R}[\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*]. \quad (5)$$

Nach (1) und (2) aber ist

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*] = \mathbf{S}_m \mathbf{S}_n [\mathfrak{D}_m \mathfrak{H}_n^*] \exp[-2\pi i((\mathfrak{b}_m - \mathfrak{b}_n) \mathbf{r})]. \quad (6)$$

Die Exponentialfunktionen zeigen an, dass  $\bar{\mathfrak{S}}$  in jeder Gitterzelle nach Richtung und Grösse nach demselben Gesetz schwankt. Beobachtbar ist aber nur der über die Zelle zu bildende Mittelwert  $\bar{\mathfrak{S}} = 1/V \int \bar{\mathfrak{S}} dV$ , wobei  $V$  das Volumen der Zelle bedeutet. Diese Mittelung setzt an die Stelle jeder Exponentialfunktion von (6) ein Integral

$$M = 1/V \int \exp[-2\pi i((\mathfrak{b}_m - \mathfrak{b}_n) \mathbf{r})] dV. \quad (7)$$

Setzen wir nach der Gleichung

$$\mathbf{r} = \mathfrak{R} + \sum_1^3 q_e \mathfrak{a}_e \quad (8)$$

den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  zusammen aus dem zur Zellenecke führenden Vektor  $\mathfrak{R}$  und dem von dort zum Aufpunkt

† Nach II, Gl. (26.39) ist

$$\mathfrak{E}_m = \mathfrak{D}_m - 4\pi \mathbf{S}_n \chi_{m-n} \mathfrak{D}_n$$

und die Fourierkoeffizienten  $\chi_{m-n}$  der mit der Ladungsdichte verknüpften Zahl  $\chi$  (siehe (26.15) und (26.19)) sind wie  $\chi$  selbst kleine Zahlen.

weisenden Vektor  $\sum_1^3 q_e \mathfrak{a}_e$  (die  $\mathfrak{a}_e$  sind die Translationen des Raumgitters), so variieren die  $q_e$  in der Zelle von 0 bis 1, und das Volumenelement ist  $dV = V \cdot dq_1 dq_2 dq_3$ . Da ferner zwischen den  $\mathfrak{a}_e$  und den  $\mathfrak{b}_e$  die Gleichungen  $[\mathfrak{a}_e \mathfrak{b}_\sigma] = \delta_{e\sigma}$  bestehen, wird

$$M = \exp[-2\pi i((\mathfrak{b}_m - \mathfrak{b}_n) \mathfrak{R})]$$

$$\prod \int_0^1 \exp[-2\pi i(m_e - n_e) q_e] dq_e.$$

Jedes der drei Integrale des Produktes verschwindet, ausser wenn das zugehörige  $m_e = n_e$  ist. Das Ergebnis für den räumlichen Mittelwert lautet also

$$[\bar{\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*}] = \mathbf{S}_m [\mathfrak{D}_m \mathfrak{H}_m^*]. \quad (9)$$

Nun ist aber wie  $\mathfrak{D}_m$  auch  $\mathfrak{H}_m$  senkrecht zu  $\mathfrak{R}_m$  (siehe II, (26·37)). Die zeitlich und räumlich gemittelte Energieströmung  $\bar{\mathfrak{S}}$  setzt sich beim einzelnen Wellenfeld also zusammen aus Vektoren, deren jeder zu einem Wellenvektor  $\mathfrak{R}_m$  parallel ist.

Enthält das Feld nur zwei starke Wellen,  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_h$ , so ist danach die Energieströmung  $\bar{\mathfrak{S}}$  die Resultante aus einem zu  $\mathfrak{R}_0$  und einem zu  $\mathfrak{R}_h$  parallelen Vektor, liegt also irgendwo zwischen den Richtungen von  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_h$ . Genauer lässt sich im Allgemeinen nicht aussagen. Nur wenn beide Strahlen gleich stark vertreten sind, bildet  $\bar{\mathfrak{S}}$  die Winkelhalbierende zwischen ihnen, liegt also parallel zur Netzebene  $h_1 h_2 h_3$ . Die beiden Wellen sind nur dann gleich stark, wenn der Anregungspunkt des Wellenfeldes, der stets auf der Dispersionsfläche liegt, in einen Achsenpunkt dieser Fläche fällt (siehe II, § 27b).

§§ 3 und 4 beschränken sich auf den Fall, dass nur in zwei Richtungen starke Wellen auftreten. Wir geben dem Wellenvektor der einen die Indices 0 (d. h. 000), dem der anderen die Indices  $h_e$  (d. h.  $h_1 h_2 h_3$ ).

### 3. Die im nichtabsorbierenden Kristall gleichzeitig entstehenden Wellenfelder

Das Ergebnis von § 2 lässt sich nicht ohne Weiteres auf das Experiment anwenden. Fällt nämlich eine ebene, linear polarisierte Welle auf den Kristall, so entstehen, sofern die elektrische oder die magnetische Schwingung senkrecht zur Ebene der beiden starken Strahlen  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_h$  vor sich geht, zwei Wellenfelder, deren Vektoren  $\mathfrak{R}_{01}$  und  $\mathfrak{R}_{02}$  sich in der zur Vorderfläche des Kristalls senkrechten Richtung ein wenig unterscheiden; im allgemeinen jedoch entstehen vier solche Wellenfelder, weil man dann die einfallende Welle durch zwei ersetzen kann, von denen die eine elektrisch, die andere magnetisch senkrecht zu der Strahlenebene schwingt. Diese vier Wellenfelder sind kohärent. Wäre die einfallende Welle unpolarisiert, so wären nur die beiden Paare unter sich kohärent, von denen das eine elektrisch, das andere magnetisch senkrecht zu jener Ebene schwingt. Wir setzen lineare

Polarisation für die einfallende Welle voraus, haben dann also im Allgemeinen mit vier interferenzfähigen Feldern zu tun.

Unterscheiden wir sie durch den Index  $\alpha$ , so tritt an die Stelle von (1) und (2) in Hinblick auf (3):

$$\mathfrak{D} = \exp [2\pi i v t] \sum_{\alpha} \exp [-2\pi i (\mathfrak{R}_{0\alpha} r)] \\ \times \mathbf{S}_m \mathfrak{D}_{m\alpha} \exp [-2\pi i (\mathfrak{b}_m r)], \quad (10)$$

$$\mathfrak{H} = \exp [2\pi i v t] \sum_{\alpha} \exp [-2\pi i (\mathfrak{R}_{0\alpha} r)] \\ \times \mathbf{S}_m \mathfrak{H}_{m\alpha} \exp [-2\pi i (\mathfrak{b}_m r)] \quad (11)$$

Nach  $\alpha$  ist von 1 bis 4 zu summieren, während die  $m_e$  entweder 0 oder gleich  $h_e$  sind. Wir nummerieren die Felder so, dass das erste und das zweite, ebenso das dritte und das vierte, die gleiche Schwingungsart haben. So wird

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \exp [-2\pi i ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}) r)] \\ \times \mathbf{S}_m \mathbf{S}_n [\mathfrak{D}_{m\alpha} \mathfrak{H}_{n\beta}^*] \exp [-2\pi i ((\mathfrak{b}_m - \mathfrak{b}_n) r)]. \quad (12)$$

Machen wir sodann von (3) und (8) Gebrauch, so ergibt sich, bei Einführung der Abkürzungen

$$P_e = (m_e - n_e) + ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}), n_e), \quad (13)$$

für das Raummittel  $[\overline{\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*}]$  die Gleichung:

$$[\overline{\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*}] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \exp [-2\pi i ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}) \mathfrak{R})] \\ \times \mathbf{S}_m \mathbf{S}_n [\mathfrak{D}_{m\alpha} \mathfrak{H}_{n\beta}^*] \prod_{1}^3 \int_0^1 \exp [-2\pi i P_e q_e] dq_e. \quad (14)$$

Die Integrationen ergeben:

$$\int_0^1 \exp [-2\pi i P_e q_e] dq_e = \frac{1 - \exp [-2\pi i ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}) a_e)]}{2\pi i (m_e - n_e + ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}) a_e))}. \quad (15)$$

Die Differenzen  $\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}$  sind, absolut genommen, klein gegen  $\lambda^{-1}$ , die skalaren Produkte  $((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}), a_e)$  daher klein gegen  $\lambda^{-1} |a_e|$ . Letzteres ist eine Zahl von der Grössenordnung von 1. Folglich kann man die Zähler dieser Brüche gleich  $2\pi i ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}), a_e)$  setzen.\* Die Brüche werden gleich 1, wenn  $m_e = n_e$  ist,

\* Dass  $\lambda^{-1} |a_e|$  etwa gleich 1 ist trifft für Röntgenstrahlen, nicht aber für kurzwellige Gamma- oder Neutronstrahlen zu. Dennoch ist für diese erst recht  $((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}), a_e) \ll 1$ . Denn die Differenzen  $|\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}|$  sind von der Grössenordnung der Abstände zwischen den beiden Schalen der Dispersionsfläche, d. h. von der Grössenordnung jener  $\xi_m$ , welche in der Gleichung der Dispersionsfläche (siehe II, (27.10))

$$\xi_0 \xi_h = \frac{v^2}{4c^2} \chi_h \chi_{\bar{h}} \quad \text{bzw.} \quad \xi_0 \xi_h = \frac{v^2}{4c^2} \chi_h \chi_{\bar{h}} \cos^2 \theta$$

( $v$  = Schwingungszahl)

auftreten. Sie haben danach die Grössenordnung von  $\frac{v}{c} \chi_m$ .

Nach II, (26.15) ist nun die Funktion  $\chi$ , deshalb auch ihre Fourierkoeffizienten  $\chi_m$ , proportional zu  $v^{-2}$ , die  $\xi_m$  somit proportional zu  $v^{-1}$ , d. h. zur Wellenlänge  $\lambda$ .

† Wie erwähnt, haben die Vektoren  $\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}$  die Richtung normal zur Eintrittsfläche.

sonst sind sie zu vernachlässigen. So geht Gleichung (14) über in die Beziehung:

$$[\overline{\mathfrak{D}\mathfrak{H}^*}] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \exp [-2\pi i ((\mathfrak{R}_{0\alpha} - \mathfrak{R}_{0\beta}), \mathfrak{R})] \mathbf{S}_m [\mathfrak{D}_{m\alpha} \mathfrak{H}_{m\beta}^*]. \quad (16)$$

Der Vektor  $\mathfrak{D}_{m\alpha}$  ist senkrecht zu  $\mathfrak{R}_{m\alpha}$ ,  $\mathfrak{H}_{m\beta}^*$  zu  $\mathfrak{R}_{m\beta}$ . Wegen des minimalen Unterschiedes zwischen  $\mathfrak{R}_{m\alpha} = \mathfrak{R}_{0\alpha} + \mathfrak{b}_m$  und  $\mathfrak{R}_{m\beta} = \mathfrak{R}_{0\beta} + \mathfrak{b}_m$  können wir mit einer kleinen Unbestimmtheit sagen: Das Produkt  $[\mathfrak{D}_{m\alpha} \mathfrak{H}_{m\beta}^*]$  hat die Richtung von  $\mathfrak{R}_m$ , sofern die Wellenfelder  $\alpha$  und  $\beta$  in der Schwingungsrichtung übereinstimmen. Anderenfalls aber sind  $\mathfrak{D}_{m\alpha}$  und  $\mathfrak{H}_{m\beta}^*$  entweder beide senkrecht zur Strahlenebene, oder sie liegen in ihr, beide senkrecht zu  $\mathfrak{R}_m$ : in diesen beiden Fällen ist  $[\mathfrak{D}_{m\alpha} \mathfrak{H}_{m\beta}^*] = 0$ . Die Energieströmung  $\vec{\mathfrak{E}}$  setzt sich aus den Anteilen der beiden Wellenfeldpaare, von denen das eine elektrisch, das andere magnetisch senkrecht zur Strahlenebene schwingt, additiv zusammen. Für jedes Paar freilich — wir betrachten etwa die Felder 1 und 2 — treten die durch die Exponentialfunktion in (16) aufgezeigten Interferenzen auf; sie bewirken, dass die Stromlinien der Energie in verschiedener Tiefe unter der Eintrittsfläche† verschiedene Richtungen, also die Form von Schlangenlinien haben. Die Periode des Richtungswechsels ist dieselbe, welche man aus den Pendellösungen der dynamischen Theorie kennt (siehe II, § 30). Darüber hinaus hängt die Strömungsrichtung noch von dem Stärke-Verhältnis der beiden starken Wellen, und dies wiederum von der Richtung der einfallenden Strahlung ab. Auch hier bekommt man also keine durch die Natur des Kristalls und der Strahlung eindeutig bestimmte Aussage über den Energiestrom.

Freilich entspricht die bisherige Voraussetzung einer einzigen einfallenden Welle genau angebarbarer Richtung nicht den Versuchsbedingungen; stets erfüllt die einfallende Strahlung einen gewissen Winkelbereich, der zwar so schmal sein mag, dass man für viele Zwecke ganz davon absehen kann, der aber doch unter allen Versuchsbedingungen den ganzen, ja nur nach Winkelsekunden zählenden Interferenzbereich umfasst. Wellen verschiedener Richtung dürfen wir dabei als inkohärent betrachten; jede von ihnen ergibt also im Kristall ihren eigenen Energieweg, und da die Richtungen der verschiedenen Energiewege verschieden sind, spaltet sich der Strom der einfallenden Gesamtenergie in ein Delta auf, im Gegensatz zu den oben erwähnten Beobachtungen.

#### 4. Berücksichtigung der Absorption

Erst die Berücksichtigung der Absorption macht das Ergebnis, wenigstens für einen Kristall hinreichender Dicke, unabhängig von den besonderen Versuchsbedingungen, weil sie einen selbst gegen den Interferenzbereich schmalen Winkelbereich als allein wirksam heraushebt.

Die in Betracht kommenden Absorptionskurven übernehmen wir aus I, Fig. 1. Diese ist nach ge-

schätzten Werten der massgebenden Konstanten für die Interferenz 200 am einem NaCl-Kristall mit einer Eintrittsfläche 111 berechnet. Ihr allgemeiner Charakter überträgt sich aber auf alle Fälle, sodass unsere

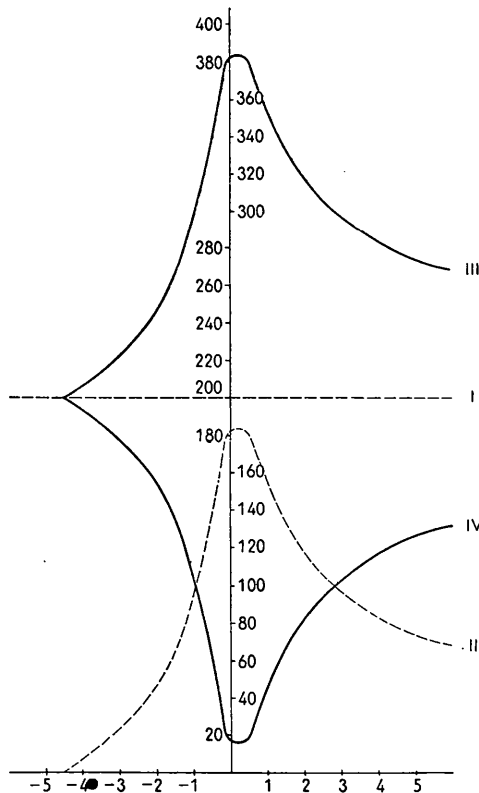


Fig. 1. Die gestrichelte Gerade I und die gestrichelte Kurve II stammen aus I, Fig. 1; sie sind dort mit  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$  und mit  $\sigma' + \sigma''$  bezeichnet. Ebenso stammen die Skalen längs der Koordinatenachsen von dort. Die diesen Kurven zugrunde liegenden Zahlen sind nur geschätzt, noch dazu für keinen der in Borrmanns Beobachtungen benutzten Kristalle. Jedoch gilt ihr allgemeiner Charakter, auf den es hier allein ankommt für alle Fälle.

qualitativen Folgerungen sich auf beliebige Kristalle und beliebige Interferenzen anwenden lassen.

Ordinaten in Fig. 1 sind Absorptionskoeffizienten in  $\text{cm}^{-1}$ , Abszisse ist die den Winkel zwischen Einfallrichtung und der Mitte des Interferenzbereichs messende Zahl  $\beta_r$ . Die Absorptionskoeffizienten sind dabei auf die Tiefe unter der Eintrittsfläche bezogen, nicht auf irgend welche Strahlenwege, da die Dämpfung jedes Wellenfeldes mit der Tiefe fortschreitet. Die gestrichelte Gerade I gibt einen von der Einfallrichtung unabhängigen Anteil, die gestrichelte Kurve II einen veränderlichen Anteil am Absorptionskoeffizienten, welcher für das eine Wellenfeld eines Paares additiv, für das andere subtraktiv hinzukommt. Für welches Wellenfeld er zu addieren, für welches er

\* Siehe I, (26). Wachsendes  $\beta_r$  bedeutet, dass sich der einfallende Strahl vom Einfallslot weiter entfernt, der Einfallswinkel also wächst.

zu subtrahieren ist, hängt von dem Vorzeichen einer der für die Interferenz massgebenden Naturkonstanten ab. Die Ergebnisse dieser Addition und Subtraktion zeigen die ausgezogenen Kurven III und IV. Von der Vielzahl der den verschiedenen Einfallrichtungen entsprechenden Wellenfelder unterdrückt danach bei einem Kristall hinreichender Dicke die Absorption die der Kurve III entsprechende Art vollständig, für die der Kurve IV entsprechende Art lässt sie nur einen am Minimum der Kurve liegenden Bezirk übrig, der um so enger wird, je dicker der Kristall; er liegt nahe der Mitte des Interferenzbereichs, enthält diese aber im allgemeinen nicht. Gleichung (16), integriert über diesen Winkel-Bereich, vereinfacht sich zu

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{S}^*] = [\mathfrak{D}_0\mathfrak{S}_0^*] + [\mathfrak{D}_h\mathfrak{S}_h^*] \quad (16a)$$

liefert also nur 2 Summanden, den einen von der Richtung  $\mathfrak{R}_0$ , den anderen von der Richtung  $\mathfrak{R}_h$ . (Die die Interferenz zweier Wellenfelder anzeigende Exponentialfunktion verschwindet mit dem Fortfall des einen Wellenfeldes.)

Dies gilt gleichermassen, ob nun die einfallenden Wellen elektrisch oder magnetisch senkrecht zur Ebene der Strahlen schwingen. Sind beide Polarisationsarten in der einfallenden Strahlung vertreten, so ist zu beachten, dass, wie schon in I betont, die Absorptionskurven von Fig. 1 flauer verlaufen für den Fall, dass die magnetische Feldstärke senkrecht zur Strahlenebene liegt. Für ihn ist also das Minimum der Kurve IV höher, die Absorption stärker als für den Fall, dass die elektrische Schwingung diese Richtung hat. Bei sehr grosser Dicke des Kristalls tritt polarisierte Strahlung aus ihm aus, und zwar schwingt die elektrische Feldstärke senkrecht zur Strahlenebene; vorausgesetzt selbstverständlich, dass diese Schwingungsart in der einfallenden Strahlung vertreten ist.

Die Richtung des resultierenden Energiestroms hängt nun noch von der relativen Grösse der beiden Summanden in (16a) ab. Nach II, (26·38) ist

$$\mathfrak{S}_m = \frac{k}{\mathfrak{R}_m^2} [\mathfrak{R}_m \mathfrak{D}_m],$$

folglich, wenn wir den Betrag (die Länge) des komplexen Vektors  $\mathfrak{D}_m$  mit der komplexen Grösse  $D_m$ , den Betrag des ebenfalls komplexen Vektors  $\mathfrak{S}_m$  mit  $|\mathfrak{S}_m|$ , (d. h.:  $\mathfrak{D}_{mx}^2 + \mathfrak{D}_{my}^2 + \mathfrak{D}_{mz}^2 = D_m^2$  und  $\mathfrak{S}_{mx}^2 + \mathfrak{S}_{my}^2 + \mathfrak{S}_{mz}^2 = |\mathfrak{S}_m|^2$ ):

$$|\mathfrak{S}_m| = \frac{k}{|\mathfrak{R}_m|} D_m.$$

Da nun aber  $k = \lambda^{-1}$  ist und die Länge von  $\mathfrak{R}_m$  nahezu denselben Wert hat, können wir hier

$$|\mathfrak{S}_m| = D_m, |\mathfrak{S}_m^*| = D_m^* \text{ und } |[\mathfrak{D}_m \mathfrak{S}_m^*]| = D_m D_m^* = |D_m|^2 \quad (17)$$

setzen.  $|D_m|$  ist die Amplitude der zum Wellenvektor  $\mathfrak{R}_m$  gehörenden elektrischen Schwingung. Weiter ist nach I, (33) und der darauf folgenden, unnummerierten

Formel\*

$$D_0 = \frac{e^{\mp v}}{2 \cos \vartheta} D_0^{(a)}, \quad (+ \text{ gilt für Feld No. 2,} \\ - \text{ für Feld No. 1})$$

$$D_h = \frac{\mp (-1)^r}{2 \cos \vartheta} \left[ \frac{\gamma_0 \chi_h}{\gamma_h \chi_h} \right]^{\frac{1}{2}} D_0^{(a)}.$$

Somit gilt

$$\left| \frac{D_0}{D_h} \right|^2 = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \left| \frac{\chi_h}{\chi_h} \right| |e^{\mp 2v}|. \quad (18) \dagger$$

Sodann verknüpft I, (34) die reellen Teile von  $v$  und  $\beta$  durch die Beziehung:

$$\sin v_r = \frac{\beta_r}{2C \left[ \frac{\gamma_0}{\gamma_h} \Phi_h \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Also wird

$$e^{\mp v} = (1 \mp i v_i) e^{i r},$$

und da  $v_i$  eine kleine Zahl ist, gilt in ausreichender Näherung

$$|e^{\mp 2v}| = |e^{\mp v}|^2 = e^{\mp 2r} = (\sin v_r \mp \cos v_r)^2.$$

Damit folgt für die relative Grösse der beiden Vektorsummanden

$$\left| \frac{D_0}{D_h} \right|^2 = \left| \frac{\chi_h}{\chi_h} \right| \frac{\left( \beta_r \mp \left[ \beta_r^2 + 4C^2 \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \Phi_h \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2}{4C^2 \Phi_h}. \quad (19)$$

Berücksichtigung der Gleichung I, (8), derzufolge mit ausreichender Näherung  $\Phi_h = |\chi_h \chi_h|$  gesetzt werden darf, vereinfacht diese Gleichung zu:

$$\left| \frac{D_0}{D_h} \right|^2 = \frac{\left( \beta_r \mp \left[ \beta_r^2 + 4C^2 \frac{\gamma_h}{\gamma_0} |\chi_h \chi_h| \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2}{4C^2 |\chi_h|^2}. \quad (20) \S$$

Hier ist nun derjenige Wert von  $\beta_r$  einzusetzen, welcher dem Absorptionsminimum von Fig. 1 entspricht. Nach I, (25) ist der Absorptionskoeffizient  $\sigma = 4\pi k \delta_i$  und nach I, (27)

$$\delta_i = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_h} \right) \chi_{0i} \pm \frac{\left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_h} \right) \chi_{0i} \beta_r + \frac{2C^2}{\gamma_0} \Psi_h}{4 \left[ \beta_r^2 + 4C^2 \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \Phi_h \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (21)$$

\* Wir wählen in den folgenden Gleichungen die Vorzeichen so, dass die oberen Vorzeichen den oberen Vorzeichen in den Gleichungen von I und II entsprechen, ebenso die unteren. Man bestätigt dies, indem man in (19) zum nicht-absorbierenden Kristall übergeht, also  $\beta_r$  durch  $\beta$  ersetzt, und dann mit Formel II, (28.18), vergleicht; beide werden auf diese Art identisch.

† Diese Gleichungen sind zunächst unter der Voraussetzung abgeleitet, dass der abgebeugte Strahl  $\mathfrak{R}_h$  in der Einfallsebene liegt. Von dieser Annahme aber befreit § 32 aus II, welcher in ihnen die Richtungskosinus  $\gamma_0$  und  $\gamma_h$  durch zwei andere Richtungskosinus  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_h$  ersetzt, welche aber ebenfalls die Winkel zwischen dem Lot der Eintrittsfläche des Kristalls und den Strahlen  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_h$  messen. Insofern sind die zitierten Gleichungen von jener Annahme unabhängig.

§ Für reelle  $\beta$  geht dies in I, (29) über.

Dieser Ausdruck hat sein Minimum, wo

$$\beta_r = -2 \left( 1 - \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \right) \frac{\chi_{0i}}{\Psi_h} \Phi_h \quad (22)*$$

ist. Dieser Wert ist also in (20) einzusetzen, um das Stärkeverhältnis der Vektorsummanden zu berechnen, welche nach (16 a) die Energieströmung  $\bar{\mathfrak{E}}$  zur Resultierenden haben. Ist  $\gamma_h = \gamma_0$ , verlassen also beide Strahlen den Kristall unter dem gleichen Austrittswinkel, so wird dies  $\beta_r = 0$  und  $|D_0|^2 = |D_h|^2 |\chi_h|/|\chi_h|$ . Nun ist freilich nicht, wie beim absorptionsfreien Kristall,  $|\chi_h|$  notwendig gleich  $|\chi_h|$ , es sei denn, dass die Ebene  $h_1 h_2 h_3$  Symmetrieebene des Kristalls ist. Zwar folgt aus I, (7) die Gleichheit von  $|\chi_{hr}|$  und  $|\chi_{hr}'|$  sowie von  $|\chi_{hi}|$  und  $|\chi_{hi}'|$ , aber auf  $\chi_h$  überträgt sich nach I, (6) diese Vertauschungsregel nicht. Immerhin ist nach der Abschätzung in I, § 2  $|\chi_{hi}'| \ll |\chi_{hr}|$ , so dass man wohl in guter Näherung mit  $|\chi_h| = |\chi_h|$  rechnen darf. Dann sind die beiden Vektor-Summanden in (16 a) gleich gross;  $\bar{\mathfrak{E}}$  halbiert den Winkel zwischen  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_h$ , liegt also parallel zu der der Interferenz zugeordneten Netzebene. Im allgemeinen jedoch ist dies  $\beta_r$ , nach I (9) von der Größenordnung von  $\chi_{hr}$ . Erst bei Kenntnis der kennzeichnenden Konstanten der Interferenz, welche sich nach I, (7), (8) und (9) aus der 'komplexen Ladungsverteilung'  $\chi$  berechnen, lässt sich eine quantitative Aussage darüber machen. Auf jeden Fall liegt  $\bar{\mathfrak{E}}$  zwischen den Richtungen  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_h$ ; es ist durchaus plausibel, dass bei den vorliegenden Beobachtungen der Winkel zwischen  $\bar{\mathfrak{E}}$  und der Netzebene  $h_1 h_2 h_3$  nur wenige Grade beträgt. Die Autoren erwähnen an manchen Stellen ausdrücklich die Existenz solcher geringer Abweichungen.

Die Zahl  $C$  in Gleichung (20) ist nach II, (28.14), gleich 1, wenn die elektrische, gleich  $\cos 2\theta$ , wenn die magnetische Feldstärke senkrecht zur Strahlenebene liegt. Die Energiebahn hat daher in beiden Fällen etwas verschiedene Richtung.

## 5. Mehrfach-Interferenzen

Um die Ergebnisse der §§ 2–4 auf den Fall zu übertragen, dass mehr als ein abgebeugter Strahl auftritt, bedürfte es einer durchgeführten dynamischen Theorie der Wellenfelder mit drei oder mehr starken Wellen. Eine solche gibt es bisher nicht; die Richtung der Strömung  $\bar{\mathfrak{E}}$  bleibt daher im Allgemeinen eine offene Frage.

Nur wenn der einfallende Strahl zu einer Spiegelungsebene des Kristalls (oder einer Drehspiegelungsebene)

\* In (19), (20), (21) gilt das obere Vorzeichen für das Wellenfeld No. 1 des betrachteten Paares, das untere für No. 2. Wie schon in I, § 3 festgestellt, kommt also bei positivem  $\psi_h$  durch einen dicken Kristall nur das Feld No. 2, bei negativem  $\psi_h$  nur Feld No. 1. In (22) ist  $\Phi_h$  nach I, (9) wegen der Kleinheit des zweiten Summanden  $\chi_{hi}' \chi_{hi}'$  notwendig positiv; das Vorzeichen von  $\beta_r$  wechselt also mit dem des Faktors  $(1 - \gamma_h/\gamma_0) \psi_h$ .

parallel ist, lässt sie sich ohne Rechnung bis zu gewissem Grade entscheiden. Es treten dann zwei zu dieser Ebene symmetrisch gelegene abgebeugte Wellen auf. Setzen wir lineare Polarisation voraus, so ist die Ebene, ob nun die elektrische oder die magnetische Feldstärke des einfallenden Strahls zu ihr senkrecht schwingt, Symmetrieebene für den ganzen Vorgang. Für jeden nicht in ihr liegenden Energiestrom ergäbe sich als gleichberechtigt ein zweiter, zu ihr symmetrisch liegender. Da der Energiestrom eines einheitlichen Wellenfeldes sich aber nicht spalten kann, sondern für jeden Punkt nur eine einzige Richtung hat, muss er in der Symmetrieebene liegen. Wo, lässt sich nicht ohne Rechnung sagen, es sei denn, dass alle drei Strahlen sich in einer Ebene befinden; in diesem Fall folgt der Energiestrom der Einfallrichtung.

## 6. Die Beobachtungen

Die Verdoppelung oder Verdreifachung von Interferenzpunkten zeigt in der Fig. 2 rechts unten eine

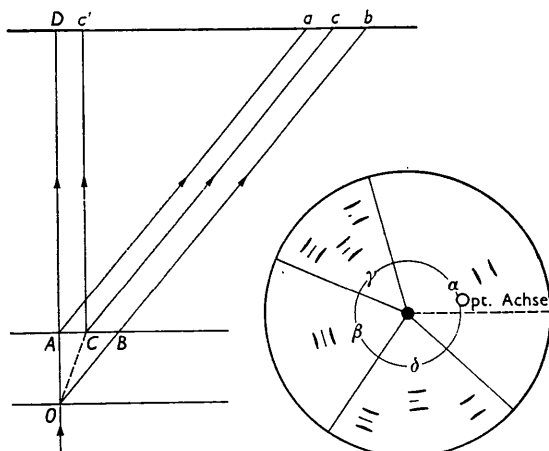


Fig. 2. Murdock's Beobachtungen und ihre Deutung. Bei  $O$  fällt Strahlung auf die zwischen  $O$  und  $ACB$  liegende Kristallplatte. Die Punkte  $abc$  liegen auf einer photographischen Platte.

Skizze von Murdock (1934), während in dem Diagramm Fig. 3, welches Herr J. Barraud freundlichst zur Verfügung gestellt hat, die Verdreifachung an fast allen Interferenzpunkten in die Augen springt. Links in Fig. 2 ist der Strahlengang zu sehen, auf welchen Murdock und die anderen in § 1 genannten Autoren dies zurückführen. Den Strahl  $OC$  und seine Fortsetzung  $Cc$  gibt Murdock als parallel zu den in Frage kommenden Netzebenen an, fügt jedoch hinzu, dass nicht alle mittleren Punkte seiner Tripel genau zu dieser Angabe stimmen. Auch bei den andern Autoren finden sich Bemerkungen über geringe Abweichungen. Jedenfalls entspricht der Strahl  $OCc$  den Beobachtungen Borrmanns und der obigen Theorie; sogar die Abweichungen macht § 4 verständlich.

Die beiden äusseren Strahlen  $Aa$  und  $Bb$  rühren von Aufrauungen der beiden Oberflächen her; dies haben

Du Mond & Bollmann, ebenso Hirsch, bewiesen, indem sie durch Abätzen oder künstliche Aufrauung der Flächen die Intensität dieser Strahlen beeinflussten, Barraud überdies, indem er statt einer planparallelen Kristallplatte einen Kristallkeil benutzte (Barraud, 1951, S. 245, Fig. 4). Dass die analogen Interferenzmaxima bei Borrmann fehlen, mag zum Teil an den ausgesuchten guten Kristallen liegen, die er durchstrahlte, lässt sich aber wohl auch durch die weiter unten zu betrachtende Absorption erklären. Murdock gibt für diese beiden äusseren Strahlen eine Deutung, welche wir hier nur noch durch Einbeziehung der Absorption erweitern wollen. Wir schränken dabei im Gegensatz zu ihm die Diskussion zunächst auf eine in oder senkrecht zu der Strahlenebene polarisierte Strahlung ein.

Bei vollkommener Mosaikstruktur fände der einfallende Strahl in  $OA$  seine Fortsetzung; von jedem Punkte dieser Strecke gingen abgebeugte Strahlen aus, auf der photographischen Platte wäre der Bereich zwischen  $a$  und  $b$  ziemlich gleichmässig belichtet. Da tatsächlich alle für solche Beobachtungen benutzten Kristalle im Inneren dem Idealkristall nahe stehen, stellt sich diese Abbeugung nur an den Punkten  $O$  und  $A$  ein, an denen der Strahl die stärker gestörten Oberflächenschichten durchsetzt; daher werden statt des Bereichs  $ab$  nur die Punkte  $a$  und  $b$  bestrahlt. Strahlung, welche im Inneren den Interferenzbedingungen entspricht, wird entweder dicht hinter  $O$  nach  $C$  und  $c$  abgelenkt, oder vor Erreichung der Rückfläche  $ACB$  absorbiert. Was sich längs  $OA$  fortpflanzt, genügt nicht mehr den Interferenzbedingungen für das Innere, findet aber in dem Mosaikgefüge bei  $A$  noch Gelegenheit zur Hervorrufung von abgebeugter Strahlung; die Vielheit der ursprünglichen Strahlenrichtungen sorgt für das Auftreten solcher Strahlung. Auch die Strahlung längs  $OB$  ist im Inneren nicht mehr interferenzfähig. Da sowohl die Strahlen  $OA$  als  $OB$  der normalen Absorption unterliegen, die nach I viel stärker ist, als die Minimalabsorption für die Strahlung  $OC$ , müssen bei wachsender Kristalldicke die Flecke bei  $a$  und  $b$  an Intensität immer mehr zurücktreten gegen den bei  $c$ . Auch dies trägt, wie erwähnt, bei Borrmann zum Fehlen der entsprechenden Intensitätsmaxima bei. Umgekehrt haben wir bei Verminderung der Dicke ein Überwiegen von  $a$  und  $b$  gegenüber  $c$  zu erwarten. Da nun die Verhältnisse von Interferenz zu Interferenz variieren, mag für einige der Murdock'schen Maxima die Platte schon dünn genug dafür gewesen sein. Die Tatsache, dass er in manchen Fällen nur Verdoppelung, statt Verdreifachung findet, erhält so eine einfache Deutung.

Da die einfallende Strahlung unpolarisiert ist, also die beiden ausgezeichneten Schwingungsarten enthält, müsste sie nach § 4 für eine Platte, welche noch beide Schwingungsarten in die Nähe von  $C$  gelangen lässt, dort im allgemeinen zu einer leichten Aufspaltung des belichteten Flecks führen, die aber kaum zur Beobachtung gelangen dürfte.

Die von Cork, Murdock und den anderen genannten

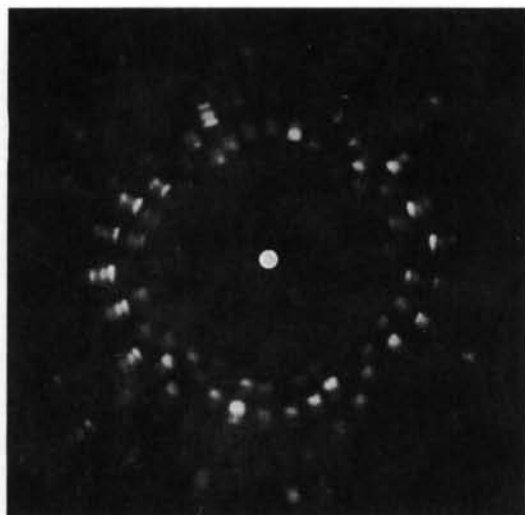


Fig. 3. Quarzplatte von 6 mm. Dicke, senkrecht zu einer zweizähligen Achse geschnitten und längs dieser Achse durchstrahlt; Abstand der Eintrittsfläche vom Film 50 mm. (Unveröffentlichte Aufnahme von J. Barraud (siehe Barraud, 1951)).

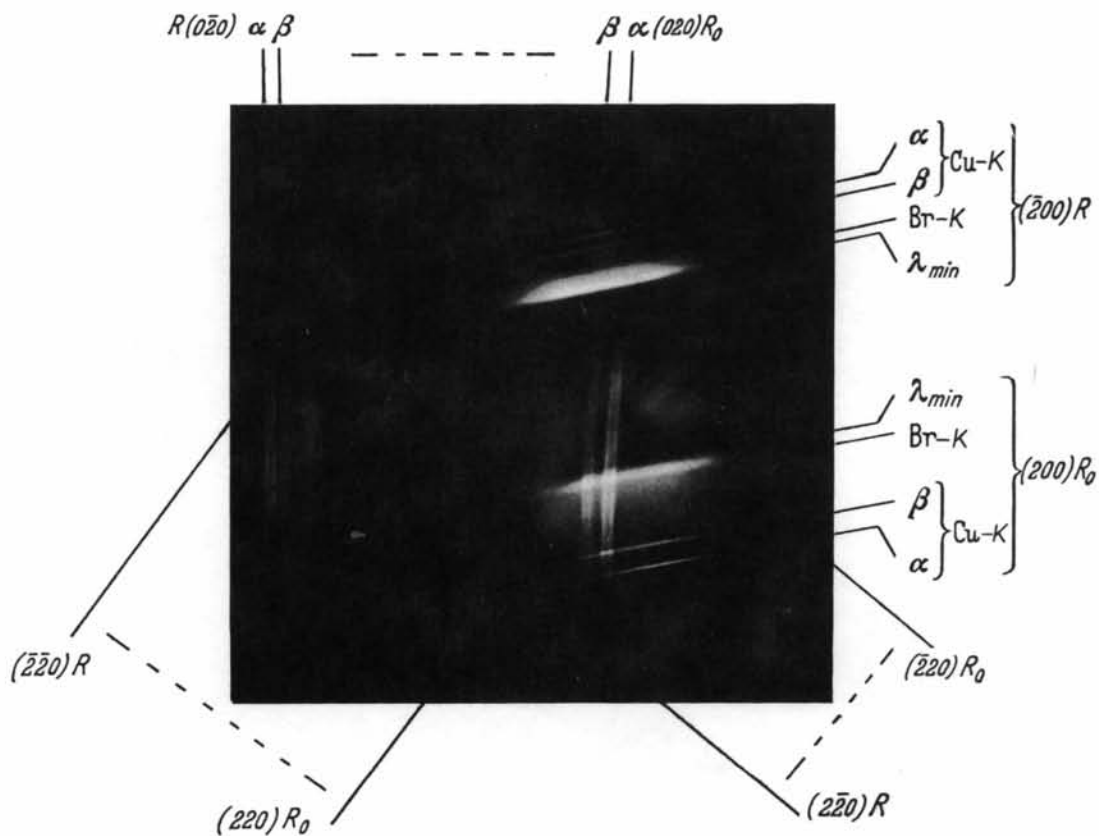


Fig. 4. Weitwinkelaufnahme an Kalkspat mit kontinuierlichem Spektrum und CuK-Strahlung. Dicke der Kristallplatte 2,71 mm.; Belichtungszeit 2 Stunden; Spannung an der Röhre 15 kV.; Stromstärke 20 mA. (Borrmann, 1950).

Autoren beobachteten Erscheinungen lassen sich also zwanglos erklären. Als überzeugenden Beweis für die Theorie jedoch vermag man sie wohl kaum zu nehmen, weil bei Murdock und vielleicht auch bei anderen der Kristall immer noch kein Einkristall war, sondern aus mehreren grossen Einkristallblöcken bestand. Die in der Skizze von Fig. 2 angedeutete Unvollständigkeit mehrerer Flecke  $c$  dürfte wohl auf das Konto dieser Unvollkommenheit kommen, ebenso vielleicht ihr Fehlen an anderen Stellen. So bleibt auch die Ursache für die Nichteinhaltung der erwarteten Lage zur Netzebene ungewiss. Auch lässt sich nicht beurteilen, ob nicht ausser der grössten für die betreffende Interferenz möglichen Wellenlänge noch deren Hälfte oder Drittel beteiligt sind; jede Abschätzung der in Frage kommenden Absorption wird damit unsicher. Die Tatsache, dass die Flecke  $a$  und  $b$  ebenso stark, meist sogar stärker erscheinen, als  $c$ , weist auf geringe Absorption, also auf die Beteiligung der kürzeren Wellenlängen hin.

Eine Kontrolle der Fehlerfreiheit des Kristalls und eine Garantie gegen das Auftreten der kürzeren Wellenlängen enthalten hingegen die Versuche Borrmanns. Bei ihnen ist zwar weder das Spektrum noch die Richtung der Strahlung auf enge Bereiche eingeschränkt, jedoch besorgt der Kristall selbst vermöge der Absorption die mehr oder minder vollständige Ausscheidung aller nicht in Betracht zu ziehenden Strahlung. Die Röhrenspannungen sind durchweg so niedrig, dass die erwähnten kürzeren Wellenlängen bestimmt fehlen,

Bei der ersten seiner Versuchsarten, für welche Fig. 4\* ein Beispiel gibt, hat der Film einen nach mehreren Zentimetern rechnenden Abstand vom Kristall. Der grosse einigermassen helle Fleck unten rechts rührt von Strahlung her, welche ohne Interferenz, stark geschwächt durch die Absorption, den Kristall durchsetzt. Die verschiedenen mit  $R$  bezeichneten Bögen hingegen rühren her von abgelenkter Strahlung; ihre Wellenlängen und Indices gibt die Beschriftung an. Sie entsprechen alle dem Punkt  $c$  der Skizze Fig. 2; Analoga zu den Punkten  $a$  und  $b$  fehlen. Die mit  $R_0$  bezeichneten Bögen rühren von Strahlen her, welche aus der einfallenden Strahlung derselben Wellenlänge und einer für die Interferenz geeigneten Richtung durch Parallelverschiebung hervorgegangen sind; sie entsprechen dem Punkte  $c'$  von Fig. 2, der in den anderen Beobachtungen, z. B. in dem Photogramm Fig. 3, nicht in Erscheinung tritt. Dass diese Punkte  $c$  und  $c'$  zu Bögen auseinander gezogen sind, rührt von dem grossen Winkelbereich der einfallenden Strahlung her. Die Bögen treten deswegen

so hell gegen die sonstige Strahlung hervor, weil sie nicht der normalen, sondern der besonders geringen Interferenz-Absorption unterworfen sind. *Borrmanns geometrische Diskussion dieser Aufnahmen\* zeigt quantitativ, dass der Weg von der Eintrittsstelle der Strahlung zu der gemeinsamen Austrittsstelle zusammengehöriger Strahlen  $R$  und  $R_0$  recht genau längs der in Frage kommenden Netzebene verläuft.* Die Kontrolle der Fehlerfreiheit des Kristalls liegt ausser in der anomal geringen Absorption in der gleichmässigen Intensität aller Bögen  $R$  und  $R_0$ ; Aufnahmen mit etwas weniger guten Kristallen ergeben erhebliche Helligkeitsschwankungen längs eines und desselben Bogens.

Bei der zweiten Versuchsart (Borrmann, 1951) liegt ein Film unmittelbar auf der Rückseite des Kristalls, dahinter ein zweiter, dazu paralleler. Man erkennt auf diese Weise, dass je ein Strahl  $R$  und ein  $R_0$  an derselben Stelle aus dem Kristall austreten, dass also die Strahlung als einheitliches Wellenfeld den Kristall durchsetzt und sich erst beim Austritt in zwei Wellen spaltet, wie es unsere Theorie verlangt. Ausserdem aber treten gleichzeitig je zwei Interferenzen  $h_1 h_2 h_3$  und  $\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3$  auf. Ist die Energieströmung in beiden Fällen zu der ihnen gemeinsamen charakteristischen Netzebene parallel, so müssen die beiden Energieströme auch zu einander parallel sein. Auch dies bestätigen die Versuche welche sich freilich nur auf die Interferenz (200), die stärkste am Kalkspat auftretende, beziehen.

Herrn Dr G. Borrmann danke ich für seine Mitwirkung bei der Diskussion der Theorie.

### Schrifttum

- BARRAUD, J. (1951). *Optique de la méthode de diffraction des rayons X de Laue*. Thèse, Paris.  
 BORRMANN, G. (1941). *Phys. Z.* **42**, 157.  
 BORRMANN, G. (1950). *Z. Phys.* **127**, 297.  
 BORRMANN, G. (1951). Vortrag gehalten am 3. Juli 1951 auf dem 2-ten Kongres der Internationalen Union für Kristallographie.  
 CORE, J. M. (1932). *Phys. Rev.* **42**, 749.  
 DU MOND, J. & BOLLMANN, V. L. (1936a). *Phys. Rev.* **50**, 97.  
 DU MOND, J. & BOLLMANN, V. L. (1936b). *Phys. Rev.* **50**, 524.  
 DU MOND, J. & BOLLMANN, V. L. (1938). *Phys. Rev.* **54**, 238.  
 HIRSCH, F. (1938). *Phys. Rev.* **54**, 238.  
 LAUE, M. v. (1948). *Röntgenstrahl-Interferenzen*, 2-te Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.  
 LAUE, M. v. (1949). *Acta Cryst.* **2**, 106.  
 MURDOCK, C. C. (1934). *Phys. Rev.* **45**, 117.

\* In kleinerem Massstab schon reproduziert (Borrmann, 1950, S. 301, Fig. 3).

\* (Borrmann, 1950, S. 305, Fig. 4, und die Anmerkung zu S. 306).